Demostración 1: $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$

Entre cada dos números reales existe un racional, por tanto hay infinitos.

Sean $x, y \in \mathbb{R},\ x < y$.

- Como $x < y \Longrightarrow y - x > 0$. Tomamos $\dfrac{1}{y-x}$. Como el conjunto $\mathbb{N}$ no está acotado, podemos asegurar que
$$\exists n \in \mathbb{N} \ / \ n > \frac{1}{y-x}; \quad \text{es decir,} \quad \underbrace{y - x > \frac{1}{n}}_{(1)}.$$

- Sea $p \in \mathbb{Z}$ la parte entera de nx. Entonces
$$p \leq nx < p+1 \Longrightarrow \underbrace{\frac{p}{n} \leq x}_{(2)} \quad \text{y} \quad \underbrace{x < \frac{p+1}{n}}_{(3)}.$$

- Aplicando las relaciones (1), (2) y (3) se cumple
$$y = x + (y - x) \underbrace{>}_{(1)\ \text{y}\ (2)} \frac{p}{n} + \frac{1}{n} = \frac{p+1}{n} \underbrace{>}_{(3)} x$$
Es decir,
$$x < \frac{p+1}{n} < y, \text{ siendo } \frac{p+1}{n} \text{ un número racional.}$$

Demostración 2: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$

Entre cada dos números reales existe un irracional, por tanto hay infinitos.

Sean $x, y \in \mathbb{R},\ x < y$.

- Por las propiedades de la relación de orden se cumplirá
$$\frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

- Por la demostración anterior
$$\exists r \in \mathbb{Q} \ / \ \frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}$$
de donde
$$x < \sqrt{2}\, r < y, \text{ siendo } \sqrt{2}\, r \text{ un número irracional.}$$